Title	規数線形束の諸性質 II
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(6) p.175-p.186
Issue Date	1947-08-29
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75198
rights	
Note	

63. 規數線形束の諸性質 II

中野秀五郎

§4. 線形汎函数

$\mathfrak{M}$ を連続なる線形束空間とする。$\mathfrak{M}$ に於ける線形汎函数 L が有界であるは任意の $a \geqq 0$ に対し

$$\sup_{0 \leqq x \leqq a} |L(x)| < +\infty \quad \text{或は} \quad \sup_{|x| \leqq a} L(x) < +\infty$$

なることである。線形汎函数の間に semi-order を $L_1(x) \geqq L_2(x)$ $(x \geqq 0)$ なるとき $L_1 \geqq L_2$ であると定義するときは $\mathfrak{M}$ に於ける線形汎函数の全体 $\mathfrak{F}$ は S・R 連続なる線形束空間を形成し L の正部は

$$L^{*}(a) = \sup_{0 \leqq x \leqq a} L(x) \qquad (a \geqq 0)$$

にて与へられる。((6)参照) 又 $L^- = (-L)^+$ $|L| = L^+ + L^-$ と記すことは通常の通りである。

線形汎函数 L が $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ に対し $\lim_{\nu\to\infty} L(a_\nu) = L(a)$ なるとき L は<u>連続</u>であると云ひ、L が連続なるときは L は有界である。((12)参照 (2)に於ける証明なり。$a_\nu \downarrow 0$ に対し $\lim_{\nu\to\infty} L(a_\nu) = 0$ より L の連続が証明されることが容易に認められる。) 正線形汎函数系 P_λ が<u>増加集合</u>即ち任意の P_{λ_1}, P_{λ_2} に対し $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2} \leqq P_\lambda$ なる P_λ が存在するとき、

$$P(a) = \sup_\lambda P_\lambda(a) < +\infty \quad (a \geqq 0)$$

なるときは P も亦連続にして $P = \bigcup_\lambda P_\lambda$ である。((2)参照) 故に連続線形汎函数の全体を $\mathfrak{F}_s$ とするときは $\mathfrak{F}_s$ は $\mathfrak{F}$ の<u>正規部分空間</u>である。即ち $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s + \mathfrak{F}_0$ にして $\mathfrak{F}_s$ と $\mathfrak{F}_0$ は互に直交する要素より成る如く $\mathfrak{F}$ が直和に分けられる。

<u>定理</u> $\mathfrak{M}$ が直交非有界、即ち直交一種連続ならば $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s$ である。

(証明は(7)を参照)

<u>定理</u> $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu = L$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a) = L(a)$ $(a \in \mathfrak{M})$ である。

((2)参照)

<u>定理</u> $\mathfrak{F} \ni L_\nu$, $\sup_\nu |L_\nu(a)| < +\infty$ $(a \in \mathfrak{M})$ ならば $\sup_\nu \left\{\sup_{0\leqq x\leqq a} |L_\nu(x)|\right\} < +\infty$ 即ち L_ν が<u>弱有界</u>ならば $|L_\nu|$ が弱有界である。

<u>証明</u> $\alpha_\nu = \sup_{0\leqq x\leqq a} |L_\nu(x)| \geqq 2^{3\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ とするときは $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2} L_\nu(x) = 0$ なるべきを以て適当に部分列を選び、$2\alpha_{\mu_\nu} < \alpha_{\mu_{\nu+1}}$, $0 \leqq a_{\mu_\nu} \leqq a$ $\left|\frac{1}{2^{\mu_\nu}} L_{\mu_\nu}\left(\frac{1}{\alpha_{\mu_1}} a_{\mu_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{\mu_{\nu-2}}} a_{\mu_{\nu-1}}\right)\right| \leqq 1$, $\left|\frac{1}{2^{\mu_\nu}} L_{\mu_\nu}\left(\frac{1}{\alpha_{\mu_{\nu-1}}} a_{\mu_\nu}\right)\right| \geqq 2^{\mu_\nu}$ なる a_{μ_ν} が得られる。

$$x = \frac{1}{\alpha_{\mu_1}} a_{\mu_2} + \frac{1}{\alpha_{\mu_2}} a_{\mu_3} + \cdots \quad 0 \leqq x \leqq a$$

と導くときは

$$\left|\frac{1}{2^{\mu_\nu}} L_{\mu_\nu}(x)\right| \geqq \frac{1}{2^{\mu_\nu}}\left|L_{\mu_\nu}\left(\frac{1}{\alpha_{\mu_{\nu-1}}} a_{\mu_\nu}\right)\right| - 1 - \frac{1}{2^{\mu_\nu}}\left|L_{\mu_\nu}\left(\frac{1}{\alpha_{\mu_\nu}} a_{\mu_{\nu+1}} + \cdots\cdots\right)\right|$$

$$\geqq 2^{\mu_\nu} - 1 - \frac{1}{\alpha_{\mu_\nu}}\left|L_{\mu_\nu}\left(\frac{1}{2^{\mu_\nu}} a_{\mu_{\nu+1}} + \frac{\alpha_{\mu_\nu}}{\alpha_{\mu_{\nu+1}} 2^{\mu_\nu}} a_{\mu_{\nu+2}}\right)\right|$$

$$\geqq 2^{\mu_\nu} - 1 - 1$$

となって矛盾する。此定理より直ちに次の定理が得られる。

<u>定理</u> $L_\nu \in \mathfrak{F}$, $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a) = L(a)$ $(a \in \mathfrak{M})$ ならば $L \in \mathfrak{F}$

定理 $L_\nu \in \mathfrak{F}_s$, $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a) = L(a)$ $(a \in \mathfrak{M})$ ならば $L \in \mathfrak{F}_s$ にして而かも $a_\mu \downarrow 0$ 及び任意の正数 ε に對し μ_0 を適当に与へれば

$$\sup_{0\le x\le a_{\mu_0}} |L_\nu(x)| \le \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

即ち L_ν が弱収斂すれば $|L_\nu|$ は一様連続である。

証明: 如何なる μ に對しても $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left\{\sup_{0\le x\le a_\mu} |L_{\lambda_\nu}(x) - L_{\rho_\nu}(x)|\right\} > \varepsilon > 0$、$\lambda_\nu \uparrow +\infty$, $\rho_\nu \uparrow +\infty$ であつたとする。今 $F_\nu = L_{\lambda_\nu} - L_{\rho_\nu}$ と置く。仮定より $\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = 0$ である。ν_ρ, $a_{\mu_\rho} \ge a_{\mu_{\rho+1}}$ 及び $x_\rho \le a_{\mu_\rho}$ $(\rho = 1, 2, \cdots)$ を次の如くに認める。

$\sup_{0\le x\le a_{\mu_\rho}} |F_{\nu_\lambda}(x)| \le \frac{1}{4}\varepsilon$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \rho-1)$ なる如く a_{μ_ρ} を

$|F_{\nu_\rho}((x_1 \smile a_{\mu_2} - a_{\mu_2}) + \cdots\cdots + (x_{\rho-1} \smile a_{\mu_\rho} - a_{\mu_\rho}))| \le \frac{1}{4}\varepsilon$ なる如く ν_ρ を

$|F_{\nu_\rho}(x_\rho)| \ge \varepsilon$, $0 \le x_\rho \le a_{\mu_\rho}$ なる如く x_ρ を定めるときは

$$x = (x_1 \smile a_{\mu_2} - a_{\mu_2}) + (x_2 \smile a_{\mu_3} - a_{\mu_3}) \cdots\cdots \le x_1 \smile a_{\mu_2}$$

と置くときは

$$\begin{aligned} |F_{\nu_\rho}(x)| &\ge |F_{\nu_\rho}(x_\rho \smile a_{\mu_{\rho+1}} - a_{\mu_{\rho+1}})| - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon \\ &\ge |F_{\nu_\rho}(x_\rho)| - |F_{\nu_\rho}(x_\rho \frown a_{\mu_{\rho+1}})| - \frac{1}{2}\varepsilon \ge \varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

となつて矛盾する。故に $\varepsilon > 0$ に對し ν_0 a_ρ を定めると、

$$\sup_{0\le x\le a_\rho} |L_\nu(x) - L_\mu(x)| \le \varepsilon \quad (\nu, \mu \ge \nu_0)$$

となり 又 $\sup_{0\le x\le a_{\rho_0}} |L_\nu(x)| \le \varepsilon$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \nu_0)$ なる如く $a_{\rho_0} \le a_\rho$ を定めると、

$$\sup_{0\le x\le a_{\rho_0}} |L_\nu(x)| \le 2\varepsilon \quad (\mu \ge \nu_0)$$

となる。さらに L_ν は一様連続である。

一様連続なることより直ちに次の定理が知られる。

定理 $L_\nu \in \mathfrak{F}_s$ が L に弱収斂し $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(x_\nu) = L(x)$.

次の定理も容易に証明される。

定理 $L_\nu \in \mathfrak{F}_s$ が一様連続にして $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(x_\mu)$ が収斂し、$\lim_{\mu\to\infty} x_\mu = x$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(x)$ も又収斂する。

定理　$\mathfrak{M}$ が直交一様連続ならば，$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s$ である。

証明は(7)を参照，此証明と同様にして次の定理が証明される。

定理　$\mathfrak{M}$ が直交一様連続にして，L_ν が弱有界ならば，L_ν は一様連続である。

$\mathfrak{M}$ が汎連続なる場合，連続線形汎函数 L にして $\bigcap_\lambda a_\lambda = 0$ に対し

$$\inf |aL(a_{\lambda_1} \cap \cdots\cdots \cap a_{\lambda_\nu})| = 0$$

なるとき，L は汎連続であると云ふ．汎連続なる線形汎函数の全体を $\mathfrak{F}_\sigma$ とすれば，$\mathfrak{F}_\sigma$ は $\mathfrak{F}_s$ の正規部分空間である．即ち $\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_\sigma + \mathfrak{F}_{s0}$ なる直和に表はされる．

連続の場合と同様にして次の定理が証明される。

定理　$L_\nu \in \mathfrak{F}_\sigma$，$\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a) = L(a)$ $(a \in \mathfrak{M})$ ならば，$L \in \mathfrak{F}_\sigma$ にして，L_ν は一様汎連続である．即ち任意の正数 ε 及び $\bigcap_\lambda a_\lambda = 0$ に対し $a = a_{\lambda_1} \cap \cdots \cap a_{\lambda_\mu}$ を適当に定めるときは，

$$\sup_{0 \le x \le a_{\lambda_1} \cap \cdots \cap a_{\lambda_\mu}} |L_\nu(ax)| \le \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

が成立する。

定理　$L_\nu \in \mathfrak{F}_s$ が一様汎連続，$\bigcup_\lambda a_\lambda = a$ にして $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a_{\lambda_1} \cup \cdots\cdots \cup a_{\lambda_\mu})$ が収斂ならば $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu(a)$ も亦収斂である。$\cap$ の場合も同様である。

又次の定理は明かである。

定理　$\mathfrak{M}$ が超汎連続ならば，$\mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_\sigma$ である。

$P(|a|) = 0$ ならば $a = 0$ なるが如き連続なる正汎函数 P が存在するとき $\mathfrak{M}$ は正則であると云ふ。

定理　$\mathfrak{M}$ が正則ならば，$\mathfrak{M}$ は超汎連続である。

証明：　$\|a\| = P(|a|)$ と考へるときは此規格は連続なるを以て，§2 により超汎連続である。

§5. 再帰線形束

$\mathfrak{M}$ を汎連続なる線形束空間とする．$\mathfrak{M}$ における汎連続なる線形汎函数の全体を $\overline{\mathfrak{M}}$ にて表はすときは，$\overline{\mathfrak{M}}$ は又汎連続なる線形束空間である．$\overline{\mathfrak{M}}$ を $\mathfrak{M}$ の共軛空間と呼ぶことゝする．$\overline{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$ に対し $\overline{a}(a) = a(\overline{a})$ と考へることにより

$a\in\mathfrak{M}$ は又 $\overline{\mathfrak{M}}$ の汎連続なる線形汎函数である。

次に $\mathfrak{M}$ に関して次の定義を設ける。

1) 半正則: 任意の $a\in\mathfrak{M}$, $a\neq 0$ に対し, $\bar{a}(a)\neq 0$ なる $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$ が存在する。

2) 正　則: 適当なる $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{a}\gneqq 0$ に対し, $\bar{a}(a)=0$, $a\geqq 0$ ならば $a=0$.

3) 局所正則: 任意の射影子 $[p]$ に対し, $[p]\mathfrak{M}$ が正則.

$\mathfrak{M}$ が半正則なるときは $\mathfrak{M}\subset\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ なることが知られる。特に $\mathfrak{M}=\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ なるとき, $\mathfrak{M}$ は再帰であると云ふ。任意の $\mathfrak{M}$ に対し $\overline{\mathfrak{M}}$ は再帰である。

4) 弱完備: $0\leqq a_\lambda\in\mathfrak{M}$ $(\lambda\in\Lambda)$, $\sup\bar{a}(a_{\lambda_1}\cup\cdots\cup a_{\lambda_\nu})<+\infty$ $(0\leqq\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}})$ ならば, $a_\lambda\leqq a\in\mathfrak{M}$ なる a が存在する。

定理　$\mathfrak{M}$ が再帰なる為の必要且充分なる条件は $\mathfrak{M}$ が弱完備なることである。(証明は(2)を参照されたし)

§4 に於ける正則の場合と同様、次の定理が成立する。

定理　$\mathfrak{M}$ が局所正則なるときは $\mathfrak{M}$ は超汎連続である。

逆に次の定理の成立することが容易に認められる。

定理　$\mathfrak{M}$ が半正則, 超汎連続にして $\overline{\mathfrak{M}}$ が係数完備なるときは $\mathfrak{M}$ は局所正則である。

$\mathfrak{M}$ に属する要素系 a_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 及び $0\leqq\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$ なる任意の $\bar{a}$ に対し,

$$\pi(\bar{a})=\sup_{\lambda}\bar{a}(|a_\lambda|)=\sup_{\lambda}\Big\{\sup_{|\bar{x}|\leqq\bar{a}}|\bar{x}(a_\lambda)|\Big\}$$

と置き、次の定義を設ける。

5) 弱有界: $\pi(\bar{a})<+\infty$　$(\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}})$

6) 一様弱連続: $\bar{a}_\nu\downarrow 0$ ならば $\lim_{\nu\to\infty}\pi(\bar{a}_\nu)=0$.

7) 一様弱汎連続: $\bigcap_{\rho}\bar{a}_\rho=0$ ならば $\inf\pi(a_{\rho_1}\cap\cdots\cap a_{\rho_\nu})=0$

§4 にて証明せし如く, $\sup_{\lambda}|\bar{a}(a_\lambda)|<+\infty$ $(\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}})$ ならば $\pi(\bar{a})<+\infty$ である。7) → 6) なることは明かである。又 $\mathfrak{M}$ が超汎連続なるときは 6) → 7) なることも容易に認められる。

次に $\mathfrak{M}$ に $\overline{\mathfrak{M}}$ による弱位相を導入する。即ち, $\bar{a}_{\lambda_1},\cdots,\bar{a}_{\lambda_\nu}\in\overline{\mathfrak{M}}$ 及び $\alpha_1<\beta_1,\cdots,\alpha_\nu<\beta_\nu$, に対し $\{a:\ \alpha_1<\bar{a}_{\lambda_1}(a)<\beta_1,\cdots,\alpha_\nu<\bar{a}_{\lambda_\nu}(a)<\beta_\nu\}$

を近傍系とする位相を与へるときは，次の定理が成立する。

定理　$\pi(\bar{a}) < +\infty$　$(0 \leqq \bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}})$ にして，$\bigcap_{\lambda} \bar{a}_{\lambda} = 0$ に對して，$\inf \pi(\bar{a}_{\lambda_1} \frown \cdots \frown \bar{a}_{\lambda_\nu}) = 0$ ならば，再歸なる $\mathfrak{M}$ に對し，

$$\mathfrak{a} = \{a : \quad \bar{a}(|a|) \leqq \pi(\bar{a})\}$$

は弱位相に關して bicompact である。

証明：　$P(\bar{a})$　$(\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}})$ が　$\bar{a}_{\lambda_1}, \cdots \bar{a}_{\lambda_\nu} \in \overline{\mathfrak{M}}$，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\nu > 0$ に對し，　$|\bar{a}_{\lambda_1}(a) - P(\bar{a}_{\lambda_1})| < \varepsilon_1, \cdots\cdots, |\bar{a}_{\lambda_\nu}(a) - P(\bar{a}_{\lambda_\nu})| < \varepsilon_\nu$

なる a が存在するとき，P が $\overline{\mathfrak{M}}$ に於ける線形汎函数にして，然かも，

$\sup_{|\bar{x}| \leqq \bar{a}} |P(\bar{x})| \leqq \pi(\bar{a})$ なることが容易に証明される。

此定理より直ちに次の定理が得られる。

定理　$\mathfrak{M}$ が再歸ならば，$a < b$ に對し，

$$\mathfrak{a} = \{x \quad : a \leqq x \leqq b\}$$

なる $\mathfrak{a}$ は弱位相に關して bicompact である。

$\mathfrak{M}$ の要素列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ の弱收斂に關し次の定義を設ける。

8) 弱收斂：　$\lim_{\nu\to\infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a)$　$(\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}})$ なるとき　$w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ と記す。

9) 絶對弱收斂：　$\lim_{\nu\to\infty} \bar{a}(|a_\nu - a|) = 0 \cdot (\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}})$ なるとき，$a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ と記す。

$a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$　より　$w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ の得られることは明かである。
又 §4 より次の定理の成立することが知られる。

定理　$\mathfrak{M}$ が再歸にして，任意の $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$ に對し $\bar{a}(a_\nu)$ が收斂ならば，$w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu$ が存在する。

定理　$\mathfrak{M}$ が超汎連續且半正則なるとき，$a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ ならば，$s\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である。

証明：　$\mathfrak{M}$ が正則なるときは　正則正汎函数 $\bar{a}$ に對し $\bar{a}(|a|) = \|a\|$ と考へれば明かに定理が成立する。$\mathfrak{M}$ が超汎連續且半正則なるときは，適當な射影子列 $[p_1] \leqq [p_2] \leqq \cdots\cdots$ に對し，$[p_\nu]\mathfrak{M}$ が正則，且 $\lim_{\nu\to\infty} [p_\nu] a_\mu = a_\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots\cdots)$ なるが如き $[p_\nu]$ が存在する。故に対角線方法により

a-w-$\lim\limits_{\to\infty} a_\nu = a$ ならば　$\text{ind-}\lim\limits_{\mu\to\infty}[p_\nu]\, a_{\nu_\mu} = a_\nu$ なるが如き部分列 a_{ν_μ} が得られる. 従つて $[p_\nu]\,\text{ind-}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{\nu_\mu} = [p_\nu]\,\text{ind-}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{\nu_\mu}$ より $\nu\to\infty$ に対し $\text{ind-}\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{\nu_\mu}$ の存在が知られる。

<u>定理</u>　$\mathfrak{M}$ が再帰にして完全要素 $a \geqq 0$ を有し且正則なるときは 一様連続なる要素列 $a_1, a_2 \cdots\cdots$ は弱収斂する部分列を有する。

<u>証明</u>: 任意の有理数 α に対し,射影子 $[(a_\nu - \alpha a)^+]$ を含む最小な射影子環を $\mathfrak{R}_0$ とする. 即ち $\mathfrak{R}_0 \ni [p], [q]$ ならば, $\mathfrak{R}_0 \ni [p][q], [a]-[p]$ とする, 然るときは, $\mathfrak{R}_0$ は明かに可附番個の射影子より成る. 次に $\mathfrak{M}$ に於ける正則なる正線形汎函数 $\bar{a}$ に対し, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathfrak{R}_0$ なる射影子 $[p]$ の全体を $\mathfrak{R}$ とするときは, $\mathfrak{R}$ は又射影子環にして $[p_\nu] \downarrow [p]$, $[p_\nu] \in \mathfrak{R}$ ならば, $[p] \in \mathfrak{R}$ である. $\mathfrak{M}$ の要素 x にして, 任意の数 α に対し $[(x-\alpha a)^+] \in \mathfrak{R}$ なる x の全体を $\mathfrak{M}_0$ とすれば, スペクトル論により $\mathfrak{M}_0$ が連続なる線形束空間にして, $\mathfrak{M}_0$ に於ける射影子の全体が $\mathfrak{R}$ と一致することが容易に認められる. 今 a_ν の部分列 a_{ν_μ} にして, $\bar{a}([p]a_{\nu_\mu})$ $(\mu = 1, 2, \cdots\cdots, [p] \in \mathfrak{R}_0)$ が収斂なるが如き a_{ν_μ} を選び出すときは 任意の $[p] \in \mathfrak{R}$ に対しても $\bar{a}([p]a_{\nu_\mu})$ は収斂する. 如何となれば $\lim\limits_{\nu\to\infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathfrak{R}_0$ なる $[p_\nu]$ が存在し $\bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ なるべきを以て, $\|\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]\| = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ と考へることにより $\overline{\mathfrak{M}_0}$ にて s-$\text{ind-}\lim\limits_{\nu\to\infty} \bar{a}[p_\nu] = \bar{a}[p]$ である. 然るに $\bar{a}[p_\nu] \leqq \bar{a}$ より部分列 $[p_{\nu_\mu}]$ を適当に定めれば $\lim\limits_{\mu\to\infty} \bar{a}[p_{\nu_\mu}] = \bar{a}[p]$ となる. 故に §4 により $\bar{a}([p]a_{\nu_\mu})$ の収斂することが知られる. 任意の $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{M}}$ は $\mathfrak{M}_0$ に於ける連続線形汎函数と考へられるを以て スペクトル論により $\bar{x} = \int \lambda\, d_\lambda [p_\lambda] \bar{a}$ となるを以て §4 により $\bar{x}(a_{\nu_\mu})$ の収斂することが知られる。

<u>定理</u>　$\mathfrak{M}$ が再帰にして, 超汎連続なるときは, 一様連続なる要素列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ は弱収斂する部分列を有する。

<u>証明</u>: 射影子列 $[p_1] \leqq [p_2] \leqq \cdots\cdots$ を正当に定めると, $\lim\limits_{\nu\to\infty}[p_\nu]a_\mu = a_\mu$ にして, $[p_\nu]\mathfrak{M}$ が正則となる. 故に前定理により部分列 a_{ν_μ} にして

$[p_\nu]$ 就にて弱收斂する．即ち $[p_\nu]a_{\nu\mu}$ が弱收斂する如く得られる．然るときは任意の $\bar{a}\in\overline{\mathfrak{M}}$ に對し，$\bar{a}([p_\nu]a_{\nu\mu})$ が弱收斂し 然かも $\overline{\mathfrak{M}}$ にて $\lim_{\nu\to\infty}\bar{a}[p_\nu]=\bar{a}_0$ と置くときは §4 により $\bar{a}_0(a_{\nu\mu})$ が弱收斂する．此処に明かに $\bar{a}_0(a_{\nu\mu})=\bar{a}(a_{\nu\mu})$ である．

注 意　$\mathfrak{M}$ の要素列 a_ν が有界．即ち $|a_\nu|\leqq a$ なる a が存在するときは a_ν は明かに一様汎連續である．又 $\overline{\mathfrak{M}}$ が一樣連續なるときは，規有界なる要素列 a_ν は一樣連續なることも容易に認められる．

§6. 再 歸 規 數

先づ規數線形束 $\mathfrak{M}$ に於ける線形汎函數に就て考へることとする．$\mathfrak{M}$ に於ける線形汎函數 L が規數有界とは

$$|L(a)|\leqq\alpha\|a\|\quad(a\in\mathfrak{M})$$

なることとする，從つて通常の様に L の規數を

$$\|L\|=\sup_{\|a\|\leqq1}|L(a)|$$

にて定義する．L が規數有界なるとき，L が有界 即ち

$$\sup_{|x|\leqq a}|L(x)|<+\infty\quad(0\leqq a\in\mathfrak{M})$$

なることは明かである．逆に次の定理が成立する．

定 理　$\mathfrak{M}$ が完備規數を有すれば，有界なる L は規數有界である．

証明は (B) を参照されたし．又次の定理は明かに成立する．

定 理　$\mathfrak{M}$ が連續規數を有すれば 規數有界なる L は汎連續である．逆に次の定理が成立する．

定 理　$\mathfrak{M}$ の規數が連續でないときは，連續でない規數有界な L が存在する．

証 明：$\mathfrak{M}$ の規數が連續でないときは．適当な正要素 a 及び射影子列 $[p_\nu]\downarrow[0]$ に對し $\lim_{\nu\to\infty}\|[p_\nu]a\|=\alpha>0$ である．今

$$P(\alpha_1([p_1]-[p_2])a+\alpha_2([p_2]-[p_3])a+\cdots+\alpha_\nu[p_\nu]a)=\alpha_\nu\alpha$$

と定義するときは，$[p_\nu]a\ (\nu=1,2,\cdots)$ を含む最小なる線形空間に於て P は線形汎函數で．然かも．

$$|P(\alpha_1([p_1]-[p_2])a+\cdots+\alpha_\nu[p_\nu]a)|=|\alpha_\nu|\alpha\leqq\|\alpha_1([p_1]-[p_2])a+\cdots+\alpha_\nu[p_\nu]a\|$$

が成立する。故に Banach の拡大定理により，P は $\mathfrak{M}$ の全部へ拡大され，$|P(x)| \leqq \|x\|$ が成立する。此 P に對しては $\lim_{\nu\to\infty} P([p_\nu]a) = \alpha > 0$ なるを以て P は連續ではない。

$\mathfrak{M}$ が汎連續にして，規数が完備規数なるときは，$\mathfrak{M}$ に於ける汎連續なる線形汎函数は規数有界なるを以て，$\mathfrak{M}$ の共軛空間 $\overline{\mathfrak{M}}$ には規数が与へられる。此 $\overline{\mathfrak{M}}$ を $\mathfrak{M}$ の<u>共軛規数空間</u>と呼ぶ。

<u>定理</u>．共軛規数空間は再帰にして其規数は半汎連續且汎單調完備規数である。從って完備規数である。

<u>証明</u>：$\overline{\mathfrak{M}}$ が再帰なることは明かである。又半汎連續且汎單調完備なることは前談話 "Reflexive vector lattice の norm に就て" 定理 i の証明が其儘適用される。

$\mathfrak{M}$ の要素系 a_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に對し $\sup_\lambda \|a_\lambda\| < +\infty$ なるとき，a_λ は<u>規数有界</u>であると云ふ。$\mathfrak{M}$ が共軛規数空間 $\overline{\mathfrak{M}}$ を有するとき次の定理の成立することは容易に認められる。

<u>定理</u>　a_λ が規数有界なることゝ弱有界なることとは同等である。

<u>定理</u>　$\overline{\mathfrak{M}}$ の規数が連續規数なるときは，$\mathfrak{M}$ の規数有界なる要素系 a_λ は一様汎連續である。

$\overline{\mathfrak{M}}$ の規数が連續規数なる爲の充分條件としては次の定理がある。

<u>定理</u>　$\mathfrak{M}$ の規数が<u>一様 個</u>　即ち任意の正数 $\varepsilon, \varepsilon'$ に対し　正数 δ を適当に定めるときは $a \frown b = 0$; $\|a\| \geqq \varepsilon'$　$\|b\| \leqq \delta$ に対して $\|a+b\| \leqq \|a\| + \varepsilon' \|b\|$ が成立するならば，$\overline{\mathfrak{M}}$ の規数は一様増加である。從って当然連續規数である。

証明は (2) を参照されたし。以上の定理により §5 に於ける弱收斂に関する定理が規数線形束に應用される。

$\mathfrak{M}$ が再帰にして，其共軛規数空間 $\overline{\mathfrak{M}}$ に対し

$$\|a\| = \sup_{\|\bar{a}\| \leqq 1} |\bar{a}(a)| \quad (a \in \mathfrak{M})$$

なるとき，$\mathfrak{M}$ の規数を<u>再帰規数</u>と云ふ。再帰規数に関しては既に前談話にて記したから略すこととする。§4 より直ちに次の定理が得られる

<u>定理</u>　$\mathfrak{M}$ が再帰規数空間なるときは，$\mathfrak{M}$ の要素列 a_ν が任意の $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{M}}$ に対し，$\bar{a}(a_\nu)$ が収斂ならば，$\lim_{\nu\to\infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a)$ なる $a \in \mathfrak{M}$ が存在する。

<u>定理</u>　再帰規数空間 $\mathfrak{M}$ が超汎連続ならば，一様弱連続なる要素列 a_ν に対し弱収斂する部分列が得られる。

<u>定理</u>　再帰規数空間 $\mathfrak{M}$ が超汎連続にして $\bar{\mathfrak{M}}$ が連続規数なるときは規数有界なる要素列 a_ν は弱収斂する部分列を有する。

任意の規数線形束 $\mathfrak{M}$ は再帰規数空間に拡大できるのである。先づ $\mathfrak{M}$ を完備規数なる様に拡大出来ることは，Cantor の方法で明かである。故に $\mathfrak{M}$ は完備規数を有するとする。Banach の定理により任意の要素 $a \neq 0$ に対し，$L(a) \neq 0$ なる規数有界なる線形汎函数が存在する。故に $\mathfrak{M}$ に於ける規数有界なる線形汎函数の全体を $\widetilde{\mathfrak{M}}$ とすれば $\widetilde{\mathfrak{M}}$ は再帰空間である。（(6) 参照）$\widetilde{\mathfrak{M}}$ の共軛規数空間 $\bar{\widetilde{\mathfrak{M}}}$ が $\mathfrak{M}$ の拡大にして，再帰規数空間である。然かも $\bar{\widetilde{\mathfrak{M}}}$ の共軛規数空間は $\widetilde{\mathfrak{M}}$ である。此 $\bar{\widetilde{\mathfrak{M}}}$ を $\mathfrak{M}$ の<u>汎函数拡大</u>と呼ぶこととする。$\mathfrak{M}$ が再帰規数空間であつても，$\mathfrak{M}$ の汎函数拡大は必ずしも $\mathfrak{M}$ と一致しないのである。其れが一致するのは $\mathfrak{M}$ の規数が連続規数の場合に限ることは以上の結果より明かである。（(8) 参照）

次に規数線形束が再帰規数空間なる為の條件として次の定理が成立する。

<u>定理</u>　規数線形束 $\mathfrak{M}$ が再帰規数空間なる為の必要且充分なる條件は，1) $\mathfrak{M}$ が汎連続，2) 半汎連続規数，3) 汎単調完備規数　4) 任意の $a \neq 0$ 及び正数 ε に対し，$|L(a)| \geqq \|a\| - \varepsilon$，$\|L\| \leqq 1$ なる汎連続線形汎函数 L が存在することである。

此定理は前談話の最後の定理より直ちに得られる。

<u>定理</u>　規数線形束 $\mathfrak{M}$ が，前定理の條件 1)，2)，3) 及び，任意の要素 $a \neq 0$ に対し，$[0] \neq [p] \leqq [a]$ にして $[p]\mathfrak{M}$ が連続規数なるが如き射影子 $[p]$ が存在するときは，$\mathfrak{M}$ は再帰規数空間である。

<u>証明</u>：　前定理の 4) が満足されることを証明すればよい。任意の $a \neq 0$ に対し，仮定に依り，$[p_\lambda] \leqq [a]$ にて $[p_\lambda]\mathfrak{M}$ が連続規数なるが如き $[p_\lambda]$ の全体に対しては明かに $\bigcup [p_\lambda]|a| = |a|$ である。然かも $[p_{\lambda_1}]$，$[p_{\lambda_2}]$

に對しては $[p_{\lambda_1}] \cup [p_{\lambda_2}] = [p_\lambda]$ なる λ が存在する。故に仮定の 2) により $\sup_\lambda \|[p_\lambda]a\| = \|a\|$ なるを以て，任意の正数 ε に対し $\|[p_\lambda]a\| \geqq \|a\| - \varepsilon$ なる $[p_\lambda]$ が存在する。$[p_\lambda]\mathfrak{M}$ は連続規数なるにより，$[p_\lambda]\mathfrak{M}$ にては規数有界なる L は汎連続である。$Banach$ の定理により $|L([p_\lambda]a)| = \|[p_\lambda]a\|$，$\|L\| \leqq 1$ なる L が存在する。此 L に対しては $|L(a)| = |L([p_\lambda]a)| \geqq \|a\| - \varepsilon$ なるを以て 4) が満足される。此定理の特別の場合として次の定理が成立する。

定理　規数線形束 $\mathfrak{M}$ が連続にして，連続規数上單調完備規数なるときは，$\mathfrak{M}$ は再帰規数空間である。然かも $\mathfrak{M}$ は汎函数拡大と一致する。((6)参照)

此定理に記せる $\mathfrak{M}$ をK-空間と名づけて小笹原君が談話240号で多くの結果を得て居る。先づK-空間 $\mathfrak{M}$ の共軛空間 $\overline{\mathfrak{M}}$ が又K-空間なるときは $\mathfrak{M}$ は $Banach$ の意味で正則であると。此れは $\overline{\mathfrak{M}}$ が $\mathfrak{M}$ に於ける規数有界なる線形汎函数の全体より成ることより明かである。然かも此定理の逆が成立するのである。即ち規数線形束 $\mathfrak{M}$ が $Banach$ の意味にて正則なるときは $\mathfrak{M}$ 及び $\overline{\mathfrak{M}}$ はK-空間である。如何となれば，此場合は $\mathfrak{M}$ は先づ汎函数拡大と一致すべきを以て，$\mathfrak{M}$ はK-空間，同様にして $\overline{\mathfrak{M}}$ もK-空間である。

次にK-空間 $\mathfrak{M}$ は弱完備であると云つて，$\mathfrak{M}$ に於ける要素列 a_ν が (o)-有界 即ち $|a_\nu| \leqq a$ なる a が存在して，任意の $\overline{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$ に對し $\overline{a}(a_\nu)$ が収斂なるとき a_ν が弱収斂なること を証明して ゐる。此場合 (o)-有界なる仮定の不要なることは §5 より明かである。

又K-空間に於ては (o)-有界なる要素列は弱収斂する部分列を有することを証明してゐるが，(o)-有界なる仮定は一様弱汎連続なる仮定に拡張されることも §5 より明かである。

最後に，K-空間 $\mathfrak{M}$ は $\overline{\mathfrak{M}}$ に於ける連続線形汎函数の全体と一致することを述べてゐるが，此れは，正しくないのである。$\mathfrak{M}$ は再帰，即ち $\overline{\mathfrak{M}}$ の汎連続線形汎函数の全体と一致はするが 必ずしも連続線形汎函数の全体とは一致しない 次に其例を与へる。$a(t)$ を $-\infty < t < +\infty$ に於ける可附番個の点を除いて 0 なる函数にして，$\|a\| = \sum_t |a(t)|$ が有限なるが如き函数の全体を

$\mathfrak{M}$とすれば，$\mathfrak{M}$はK−空間である．$\overline{\mathfrak{M}}$は総ての有界函数より成る。

今実数全体を整列してt_ξとする．$\overline{a}_\eta(t)$を$\xi \leqq \eta$に對し$\overline{a}_\eta(t_\xi)=1$にして，$\xi<\eta$に對し$\overline{a}_\eta(t_\xi)=0$とすれば，明かに$\overline{a}_\eta \in \overline{\mathfrak{M}}$である．射影子$[\overline{a}]$に對應する$\overline{\mathfrak{M}}$の*Eigenraum* ((2)参照)に於ける近傍を$U[\overline{a}_\eta]$とし$\prod_\eta U[\overline{a}_\eta] \ni \mathfrak{p}_0$なる点$\mathfrak{p}_0$を考へる．即ち$[\overline{a}_\eta]$の総てを含む*Maximal ideal*の一つを$\mathfrak{p}_0$とする．然るときは$\overline{\mathfrak{M}}$に含まれる常数1に對し*relative spection* $(\frac{\overline{a}}{1}, \mathfrak{p}_0)$は．$\overline{\mathfrak{M}}$の連續線形汎函数ではあるが汎連續ではない。((5)参照) 故に$(\frac{\overline{a}}{1}, \mathfrak{p}_0)$は$\mathfrak{M}$には含まれない。如何となれば$\mathfrak{M}$に含まれる$a$は悉く$\overline{\mathfrak{M}}$の汎連續線形汎函数である。

(1947. 8. 29)